PITAGORAS ACADEMIA

EJERCICIOS CLASE - ÁLGEBRA

CAPÍTULO: ECUACIONES
TEMA: ECUACIONES POLINOMIALES Y GRADO SUPERIOR
PRODUCTO: UNI AVANZADO
PROFESOR: FREDDY AVALOS CUARITE

1. Resuelva la ecuación

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{x}{16}+\ldots-\frac{x}{1024}=\frac{1023}{1024}$$

A) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ B) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ C) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$
D) $\{2\}$ E) $\{3\}$

2. Si z_1, z_2 son raíces de la ecuación

$4z-(3+9i)=(1-i)z^2$; $z_1 \in \mathbb{R}$

determine $\left|\frac{z_2}{z_1}\right|$.

A) 3 B) 1/3 C) $\sqrt{3}$
D) 5 E) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

3. Si en la ecuación $2x^2+3x+m=0$, las raíces difieren en 1. Determine $E=\frac{m}{m+2}$.

A) $\frac{5}{16}$ B) $\frac{5}{21}$ C) $\frac{16}{21}$
D) $\frac{21}{16}$ E) $\frac{1}{5}$

4. Las ecuaciones $(x-\alpha)^5\cdot(x-3)^4=0$

$x^3-3\beta x^2+3\beta^2 x-\beta^3=0$

son equivalentes. Calcule $\frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}$.

A) 2/3 B) 3/4 C) 1/7
D) 1 E) 2

5. Si $\alpha \wedge \beta$ son dos raíces de $P_{(x)}=x^3-2x+m$, tal que $\alpha+\beta=-1$, determine el valor de $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$.

A) 3 B) 2 C) -3
D) -1 E) -2

6. Si $5+\sqrt{5}$ es raíz del polinomio

$P_{(x)}=x^3+(3m+2n-8)x^2-(5m-3n-15)x+80$;

$\{m, n\} \subset \mathbb{Q}$; halle el valor de $17m+5n$.

A) 43 B) 41 C) 42
D) 44 E) 45

7. Dos raíces de una ecuación polinomial de coeficientes enteros mónicos y de cuarto grado son $\frac{5}{1+2i}; \frac{5}{2+i}$. Halle el producto de sus raíces.

A) -5 B) 5 C) 25
D) 0 E) -25

8. Sea la ecuación bicuadrada $3x^4-5x^2+1=0$ de raíces x_1, x_2, x_3, x_4. Determine $E=x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$.

A) $\frac{15}{17}$ B) 5 C) $\frac{38}{9}$
D) $\frac{17}{18}$ E) $\frac{19}{18}$

9. Con respecto a la ecuación polinomial de coeficientes reales

$ax^4+bx^2+c=0 \ \wedge \ a\neq 0$

indique las proposiciones que son correctas.

I. Si $b^2>4ac \rightarrow$ sus raíces son reales.

II. Si $b^2<4ac \rightarrow$ sus raíces son imaginarias.

III. Si $b^2>4ac \ \wedge \ \frac{b}{a}<0 \ \wedge \ \frac{c}{a}>0$ entonces sus raíces son reales.

A) II y III B) I, II y III C) solo III
D) solo I E) I y II

10. El polinomio

$P_{(x)}=x^4+ax^3-20x^2+bx+c$

tiene como raíz doble a -3 y como una raíz simple a 5. Calcule el valor de $ac-b$.

A) -24 B) -32 C) -12
D) -20 E) -18

11. Luego de resolver la ecuación

$x^2-(4+3i)x+1+7i=0$

se obtiene como conjunto solución a $\{x_1; x_2\}$. Determine el valor de $|x_1|^2+|x_2|^2$.

A) 12 B) 21 C) 17
D) 15 E) 13

12. Si se tiene que

$\pi\alpha^3+\sqrt{2}\alpha^2+\sqrt{3}\alpha+\sqrt{5}=0$

$\pi\beta^3+\sqrt{2}\beta^2+\sqrt{3}\beta+\sqrt{5}=0$

$\pi\theta^3+\sqrt{2}\theta^2+\sqrt{3}\theta+\sqrt{5}=0$

determine el valor de $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\beta\theta}$.

A) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ E) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

13. Resuelva la ecuación

$x^6-6x^5+14x^4-18x^3+14x^2-6x+1=0$

A) $CS=\left\{1; \frac{1+\sqrt{3}i}{2}; \frac{1-\sqrt{3}i}{2}; \frac{2+\sqrt{5}}{2}; \frac{2-\sqrt{5}}{2}\right\}$

B) $CS=\left\{1; \frac{1+\sqrt{3}i}{4}; \frac{1-\sqrt{3}i}{4}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

C) $CS=\left\{1; \frac{1-\sqrt{3}}{4}; \frac{1+\sqrt{3}}{4}; \frac{3+\sqrt{5}i}{2}; \frac{3-\sqrt{5}i}{2}\right\}$

D) $CS=\left\{1; \frac{1-\sqrt{3}i}{2}; \frac{1-\sqrt{3}i}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

E) $CS=\left\{1; \frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}i}{3}; \frac{3-\sqrt{5}i}{3}\right\}$

14. Con respecto a las raíces de la ecuación

$6x^5+7x^4-4x^3-x^2+5x+2=0$

indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda.

I. Todas sus raíces reales son negativas.
II. Presenta 2 raíces imaginarias conjugadas.
III. Presenta solo una raíz irracional perteneciente al intervalo $\langle -2; -1\rangle$.

A) VVV B) VFF C) FFF
D) FVV E) VVF

15. Si $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n$ son raíces de la ecuación polinomial $x^n-x^2+1=0$, calcule el valor de

$\left(1-x_1^2\right)^6\left(1-x_2^2\right)^6\left(1-x_3^2\right)^6\ldots\left(1-x_n^2\right)^6$

A) n B) $(-1)^n$ C) $(-2)^n$
D) 1 E) 6

16. Determine la condición para que las ecuaciones

$x^3+2x+a=0$ y $x^2+x+b=0$

presenten una raíz en común.

A) $(b+a)^2+(b-2)(b^2-3b+a)=0$

B) $(b+a)^2+(b-3)(b^2-2b+a)=0$

C) $(b-a)^2+(b-3)(b^2-2b-a)=0$

D) $(b-a)^2+(b-2)(b^2-2b+a)=0$

E) $(b+a)^2+(b-3)(b^2-2a+b)=0$

17. Determine la suma de los valores de n para que la ecuación

$(x^2-x-6)(x^2-4x+n)=0$

presente solo 3 soluciones.

A) 4 B) -5 C) -9
D) -6 E) 8

PARA EL ALUMNO

1. Halle el conjunto solución de la siguiente ecuación.

$$\frac{(a+b)x}{a-b}+\frac{ax}{a+b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{ax}{a-b}+\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$$

donde a y b son constantes reales no nulos tal que $a\neq\pm b$.

A) $\{1\}$ B) $\{2a\}$ C) $\{2b\}$
D) $\{2\}$ E) $\{4\}$

2. Si α es una solución de la ecuación

$$x^2-2\sqrt{3}x+4=0$$

calcule α^{18}.

A) $\sqrt{3}^5$ B) 3^9 C) 2^{18}
D) -4^9 E) -4^{18}

3. ¿Qué cantidad es necesario aumentar a las raíces de la ecuación

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)x^2+2(a+b)x+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1$$

para que las cantidades resultantes sean iguales en magnitud, pero de signos opuestos?

A) $\frac{a-b}{ab}$
B) $\frac{ab}{a-b}$
C) $\frac{a+b}{ab}$
D) $\frac{ab}{a+b}$
E) $\frac{b-a}{ab}$

UNI 2004 - I

4. Si la ecuación $3x^2-10x+m=0$ tiene dos raíces reales positivas y diferentes, entonces el parámetro m varía en el intervalo

A) $\langle 0, 1\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{25}{3}\right\rangle$ C) $\langle -1; 2\rangle$
D) $\langle 0; 1]$ E) $\langle -1; 1\rangle$

5. Si el cuadrado de una de las raíces del polinomio $P_{(x)}=x^3+2x^2-7x+n$ es la suma de los cuadrados de las otras raíces, halle un valor de n.

A) -10 B) 8 C) -24
D) -6 E) 12

6. Sea P la función polinomial definida por

$$P_{(x)}=ax^3-x^2+2x+b;$$

sabiendo que es una raíz doble.
Calcule el valor de $a+r$.

A) 2 B) 31/8 C) 13/8
D) 33/8 E) 35/8

7. Sea la ecuación bicuadrada

$$2x^4-mx^2+\left(m-\frac{3}{2}\right)=0;\ m>3$$

tal que CS$=\{\alpha;-\alpha\}$; $\alpha>0$ determine $m+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\alpha$.

A) 9 B) 6 C) 10
D) 8 E) 12

8. Luego de resolver la ecuación

$$(x^2+x+1)^2-(x^2-x+1)^2=(x+1)^4-(x-1)^4$$

se obtiene como conjunto solución
CS$=\{x_1; x_2; x_3\}$. Calcule $|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2$.

A) 3 B) -2 C) $-2i$
D) i E) 2

9. Si el polinomio

$$P_{(x)}=ax^3+bx^2+cx+d=0$$

tiene como raíces a α, β y θ, determine las proposiciones que son correctas.

I. $dx^3+cx^2+bx+a=0$ tiene como raíces a $\frac{1}{\alpha}; \frac{1}{\beta}$ y $\frac{1}{\theta}$.

II. $ax^3+2bx^2+4cx+8d=0$ tiene como raíces a 2α; 2β y 2θ.

III. $a(x+2)^3+b(x+2)^2+c(x+2)+d=0$ tiene como raíces a $\alpha-2$; $\beta-2$ y $\theta-2$.

A) solo I

B) I y II

C) solo III

D) I y III

E) I, II y III

10. Luego de resolver la ecuación

$2x^4-x^3-3x^2+2x-2=0$

indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. Presenta solo 2 raíces reales.

II. La suma de raíces reales es 0,5.

III. El producto de las raíces no reales es 0,5.

A) VFV B) VVV C) VFF

D) FFV E) FFF

11. Si $\{a; b\} \subset \mathbb{C}$ tal que $x^2+ax+b=0$ determine la relación correcta para que presente una solución real.

A) $\text{Im}^2(b)+\text{Re}(b)\text{Im}(a)=\text{Re}(a)\text{Im}(a)\text{Im}(b)$

B) $\text{Im}^2(b)+\text{Re}^2(b)\text{Im}(a)=\text{Re}(a)\text{Im}(a)\text{Im}(b)$

C) $\text{Im}(b)+\text{Re}^2(b)\text{Im}^2(a)=\text{Re}(a)\text{Im}(b)$

D) $\text{Im}^2(a)+\text{Re}^2(b)\text{Im}(a)=\text{Re}(a)\text{Im}(a)\text{Im}(b)$

E) $\text{Im}^2(b)+\text{Re}(b)\text{Im}^2(a)=\text{Re}(a)\text{Im}(a)\text{Im}(b)$